PART2　２倍角の公式，半角の公式

例題

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ で，$\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\sin 2\theta$，$\cos 2\theta$，$\tan 2\theta$

(2)　$\sin\frac{\theta}{2}$，$\cos\frac{\theta}{2}$，$\tan\frac{\theta}{2}$

Point Pickup

練習

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$ で，$\sin\theta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\sin 2\theta$，$\cos 2\theta$，$\tan 2\theta$

(2)　$\sin\frac{\theta}{2}$，$\cos\frac{\theta}{2}$，$\tan\frac{\theta}{2}$

第10講　PART2 確認問題

$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ で，$\sin\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ のとき，次の値を求めよ。

1 $\sin 2\theta = \frac{\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$

$\cos 2\theta = \frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$

$\tan 2\theta = \boxed{\text{キク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$

2 $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{コサ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$

$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$

$\tan\frac{\theta}{2} = \boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}$

PART2　2 倍角の公式，半角の公式

例題

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ で，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\sin 2\theta$，$\cos 2\theta$，$\tan 2\theta$

(2)　$\sin\dfrac{\theta}{2}$，$\cos\dfrac{\theta}{2}$，$\tan\dfrac{\theta}{2}$

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ より，$\cos\theta<0$　　よって　$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}=-\dfrac{3}{4}$

(1)　$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{4}\cdot\left(-\dfrac{3}{4}\right)=-\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$

$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)^2=\dfrac{9}{16}-\dfrac{7}{16}=\dfrac{1}{8}$

$\tan 2\theta=\dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=-3\sqrt{7}$

（別解）$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

よって　$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right)}{1-\left(-\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right)^2}=-\dfrac{6\sqrt{7}}{9-7}=-3\sqrt{7}$

(2)　$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$　より　$\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$　　よって　$\sin\dfrac{\theta}{2}>0$，$\cos\dfrac{\theta}{2}>0$

$\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{2}=\dfrac{1-\left(-\dfrac{3}{4}\right)}{2}=\dfrac{7}{8}$　　よって　$\sin\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{7}{8}}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$

$\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1+\cos\theta}{2}=\dfrac{1-\dfrac{3}{4}}{2}=\dfrac{1}{8}$　　よって　$\cos\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{1}{8}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\cos\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{2}}=\sqrt{7}$

（別解）$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$　より　$\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$　　よって　$\tan\dfrac{\theta}{2}>0$

$$\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1-\left(-\frac{3}{4}\right)}{1-\frac{3}{4}}=7\qquad したがって\quad \tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{7}$$

練習

$\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$ で，$\sin\theta=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\sin 2\theta$，$\cos 2\theta$，$\tan 2\theta$

(2)　$\sin\dfrac{\theta}{2}$，$\cos\dfrac{\theta}{2}$，$\tan\dfrac{\theta}{2}$

$\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$ より，$\cos\theta<0$　　よって　$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}=-\dfrac{1}{3}$

(1)　$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\left(-\frac{1}{3}\right)^2-\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{1}{9}-\frac{8}{9}=-\frac{7}{9}$$

$$\tan 2\theta=\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=\frac{4\sqrt{2}}{-7}=-\frac{4\sqrt{2}}{7}$$

（別解）　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{-2\sqrt{2}}{-1}=2\sqrt{2}$

よって　$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2\cdot(2\sqrt{2})}{1-(2\sqrt{2})^2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{1-8}=-\dfrac{4\sqrt{2}}{7}$

(2)　$\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$　より　$\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{3}{4}\pi$　　よって　$\sin\dfrac{\theta}{2}>0$，$\cos\dfrac{\theta}{2}<0$

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}=\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}{2}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\qquad よって\quad \sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}=\frac{1-\frac{1}{3}}{2}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\qquad よって\quad \cos\frac{\theta}{2}=-\sqrt{\frac{1}{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=-\sqrt{2}$$

（別解）$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$　より　$\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<\frac{3}{4}\pi$　　よって　$\tan\frac{\theta}{2}<0$

$$\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}{1-\frac{1}{3}}=2$$　　したがって　$\tan\frac{\theta}{2}=-\sqrt{2}$

第10講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：4，イ：5，ウ：9，エオ：−1，
カ：9，キク：−4，ケ：5

[解説]

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$ より，$\cos\theta<0$

よって

$$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}$$
$$=-\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}=-\frac{2}{3}$$

したがって

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta \quad \text{[A]}$$
$$=2\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=\mathbf{\frac{4\sqrt{5}}{9}}$$

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta \quad \text{[B]}$$
$$=\left(-\frac{2}{3}\right)^2-\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2=\mathbf{-\frac{1}{9}}$$

$$\tan 2\theta=\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=\frac{\frac{4\sqrt{5}}{9}}{-\frac{1}{9}}=\mathbf{-4\sqrt{5}}$$

（別解）

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ であるから

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \quad \text{[C]}$$
$$=\frac{2\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}}{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{1-\frac{5}{4}}=\mathbf{-4\sqrt{5}}$$

[A]　2 倍角の公式
$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

[B]　2 倍角の公式
$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
$=1-2\sin^2\alpha$
$=2\cos^2\alpha-1$

[C]　2 倍角の公式
$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

2 [正解] コサ：30，シ：6，ス：－，セ：6，

ソ：6，タ：－，チ：5

[解説]

$\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$ より $\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{3}{4}\pi$

よって $\sin\dfrac{\theta}{2}>0$，$\cos\dfrac{\theta}{2}<0$

また，$\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ より $\cos\theta=-\dfrac{2}{3}$ である。

これより

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2} \quad \text{[D]}$$

$$=\frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}{2}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}$$

[D] 半角の公式

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$\sin\dfrac{\theta}{2}>0$ より

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{5}{6}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{30}}{6}}$$

また

$$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2} \quad \text{[E]}$$

$$=\frac{1-\frac{2}{3}}{2}=\frac{3-2}{6}=\frac{1}{6}$$

[E] 半角の公式

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$\cos\dfrac{\theta}{2}<0$ より

$$\cos\frac{\theta}{2}=-\sqrt{\frac{1}{6}}=\boldsymbol{-\frac{\sqrt{6}}{6}}$$

これより

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{\sqrt{30}}{-\sqrt{6}}=\boldsymbol{-\sqrt{5}}$$

(別解)

$\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$ より $\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{3}{4}\pi$

よって　$\tan\dfrac{\theta}{2}<0$

$$\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$ ［F］

$$=\frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}{1-\frac{2}{3}}=\frac{3+2}{3-2}=5$$

［F］　半角の公式

$$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

したがって

$$\tan\frac{\theta}{2}=-\sqrt{5}$$